N10/5/MATHL/HP1/SPA/TZ0/XX

88107225

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 1

Jueves 4 de noviembre de 2010 (tarde)

2 horas

Número de convocatoria del alumno

0	0							

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste toda la sección A en los espacios provistos.
- Sección B: conteste toda la sección B en las hojas de respuestas provistas. Escriba su número de convocatoria en cada una de las hojas de respuestas, y adjúntelas a este cuestionario de examen y a su portada empleando los cordeles provistos.
- Cuando termine el examen, indique en la casilla correspondiente de la portada el número de hojas que ha utilizado.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN A

Conteste ***todas*** *las preguntas en los espacios provistos. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.*

1. *[Puntuación máxima: 4]*

Halle el conjunto de valores de x para los cuales $|x-1| > |2x-1|$.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

2. *[Puntuación máxima: 5]*

Considere la matriz $\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 0 & 2 & k-1 \\ k & 0 & k-2 \end{pmatrix}$.

Halle todos los posibles valores de k para los cuales la matriz es singular.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. *[Puntuación máxima: 4]*

Desarrolle y simplifique $\left(x^2 - \dfrac{2}{x}\right)^4$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

4. *[Puntuación máxima: 5]*

Jenny va al colegio en autobús todos los días. Cuando no llueve, la probabilidad de que el autobús llegue con retraso es igual a $\frac{3}{20}$. Cuando llueve, la probabilidad de que el autobús llegue con retraso es igual a $\frac{7}{20}$. La probabilidad de que llueva en un día dado es igual a $\frac{9}{20}$. Un día determinado, el autobús llega con retraso. Halle la probabilidad de que ese día no esté lloviendo.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

5. *[Puntuación máxima: 6]*

La media de los diez primeros términos de una progresión aritmética es igual a 6. La media de los veinte primeros términos de la progresión aritmética es igual a 16. Halle el valor del 15.º término de la progresión.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

6. *[Puntuación máxima: 8]*

La suma, S_n, de los n primeros términos de una progresión geométrica, cuyo término n-ésimo es u_n, viene dada por

$$S_n = \frac{7^n - a^n}{7^n}\text{, donde } a > 0\,.$$

(a) Halle una expresión para u_n. *[2 puntos]*

(b) Halle el primer término y la razón común la progresión. *[4 puntos]*

(c) Considere la suma de los infinitos términos de la progresión.

(i) Determine los valores de a para los cuales existe la suma de los infinitos términos de la progresión.

(ii) Halle la suma de los infinitos términos, cuando esta suma existe. *[2 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

7. *[Puntuación máxima: 8]*

Considere el plano cuya ecuación es $4x - 2y - z = 1$ y la recta que viene dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = 3 - 2\lambda$$
$$y = (2k - 1) + \lambda$$
$$z = -1 + k\lambda.$$

Sabiendo que la recta es perpendicular al plano, halle:

(a) el valor de k; *[4 puntos]*

(b) las coordenadas del punto de intersección de la recta y el plano. *[4 puntos]*

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

8. *[Puntuación máxima: 7]*

Halle y en función de x, sabiendo que $(1+x^3)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x^2 \operatorname{tg} y$ y que para $x=0$, $y=\dfrac{\pi}{2}$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

9. *[Puntuación máxima: 8]*

Considere la función $f : x \to \sqrt{\frac{\pi}{4} - \arccos x}$.

(a) Halle el mayor dominio posible de f. *[4 puntos]*

(b) Determine una expresión para la función inversa, f^{-1}, y escriba su dominio. *[4 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

10. *[Puntuación máxima: 5]*

Sea α el ángulo que forman los vectores unitarios $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, donde $0 \le \alpha \le \pi$.

(a) Exprese $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ y $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ en función de α. *[3 puntos]*

(b) **A partir de lo anterior**, determine para qué valor de $\cos\alpha$ se cumple que $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = 3|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$. *[2 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

***NO** escriba soluciones en esta página. Cualquier trabajo escrito en esta página **NO** será corregido.*

SECCIÓN B

*Conteste **todas** las preguntas en las hojas de respuestas provistas. Empiece una página nueva para cada respuesta.*

11. *[Puntuación máxima: 19]*

Considere el número complejo $\omega = \frac{z+\mathrm{i}}{z+2}$, donde $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ y $z = x + \mathrm{i}y$.

(a) Si $\omega = \mathrm{i}$, determine z y expréselo de la forma $z = r \operatorname{cis} \theta$. *[6 puntos]*

(b) Demuestre que $\omega = \frac{(x^2+2x+y^2+y)+\mathrm{i}(x+2y+2)}{(x+2)^2+y^2}$. *[3 puntos]*

(c) **A partir de lo anterior**, compruebe que cuando $\mathrm{Re}(\omega)=1$ los puntos (x, y) pertenecen a una recta l_1, y escriba la pendiente de dicha recta. *[4 puntos]*

(d) Sabiendo que $\arg(z) = \arg(\omega) = \frac{\pi}{4}$, halle $|z|$. *[6 puntos]*

12. *[Puntuación máxima: 18]*

(a) Una partícula P se mueve en línea recta. El desplazamiento de P con relación al origen viene dado por:

$$s = 2\operatorname{sen}(\pi t) + \operatorname{sen}(2\pi t),\ t \geq 0,$$

donde t representa el tiempo, en segundos, y el desplazamiento se mide en centímetros.

(i) Escriba el período de la función s.

(ii) Halle expresiones para la velocidad, v, y la aceleración, a, de P.

(iii) Determine todas las soluciones de la ecuación $v = 0$ para $0 \leq t \leq 4$. *[10 puntos]*

(b) Considere la función

$$f(x) = A\operatorname{sen}(ax) + B\operatorname{sen}(bx),\ A,\ a,\ B,\ b,\ x \in \mathbb{R}.$$

Utilice la inducción matemática para demostrar que la $(2n)$-ésima derivada de f viene dada por

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n\left(Aa^{2n}\operatorname{sen}(ax) + Bb^{2n}\operatorname{sen}(bx)\right),\ \text{para todo } n \in \mathbb{Z}^+.$$ *[8 puntos]*

***NO** escriba soluciones en esta página. Cualquier trabajo escrito en esta página **NO** será corregido.*

13. *[Puntuación máxima: 23]*

Considere la curva $y = x\mathrm{e}^{x}$ y la recta $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$.

(a) Sea $k = 0$.

(i) Compruebe que la curva y la recta se cortan una vez.

(ii) Halle el ángulo que forman la tangente a la curva y la recta, en el punto de intersección. *[5 puntos]*

(b) Sea $k = 1$. Compruebe que la recta es una tangente a la curva. *[3 puntos]*

(c) (i) Halle los valores de k para los cuales la curva $y = x\mathrm{e}^{x}$ y la recta $y = kx$ se cortan en dos puntos distintos.

(ii) Escriba las coordenadas de los puntos de intersección.

(iii) Escriba una integral que represente el área de la región A delimitada por la curva y la recta.

(iv) **A partir de lo anterior**, sabiendo que $0 < k < 1$, compruebe que $A < 1$. *[15 puntos]*